

Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Comunidad Valenciana 2021,
Convocatoria ordinaria

mentoor.es



Problema 1. Álgebra

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + (a + 1)z = 2 \\ x + (a - 1)y + 2z = 1 \\ 2x + ay + z = -1 \end{cases}$$

- Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a .
- Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

Solución:

- Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a .

Para estudiar el sistema, aplicaré el Teorema de Rouché-Frobenius. Para ello, analizo el determinante de la matriz de coeficientes, A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a + 1 \\ 1 & a - 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante:

$$\begin{aligned} |A| &= 1(a - 1 - 2a) - 1(1 - 4) + (a + 1)(a - 2(a - 1)) \\ &= -a - 1 - (-3) + (a + 1)(a - 2a + 2) \\ &= -a + 2 + (a + 1)(-a + 2) = (-a + 2)(1 + a + 1) = (-a + 2)(a + 2) = 4 - a^2 \end{aligned}$$

Igualo el determinante a cero para encontrar los valores críticos de a : $4 - a^2 = 0 \implies a^2 = 4 \implies a = \pm 2$.

Caso 1: $a \notin \{2, -2\}$. En este caso, $|A| \neq 0$, por lo que $\text{Rg}(A) = 3$. Al ser la matriz ampliada A^* de dimensión 3×4 , su rango también es 3. Como $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 3 = n^{\circ}$ de incógnitas, el sistema es **Compatible Determinado (S.C.D.)**.

Caso 2: $a = 2$. $|A| = 0 \implies \text{Rg}(A) < 3$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, $\text{Rg}(A) = 2$.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Las columnas 1 y 2 de la matriz A son idénticas, por lo que el rango de A^* no puede ser 3. El menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0. \text{Rg}(A^*) = 2.$$

Como $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2 < 3$, el sistema es **Compatible Indeterminado (S.C.I.)**.

Caso 3: $a = -2$. $|A| = 0 \implies \text{Rg}(A) < 3$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, $\text{Rg}(A) = 2$.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$\det(C_1, C_2, C_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1(5) - 1(-3) + 2(4) = 16 \neq 0$. $\text{Rg}(A^*) = 3$. Como los rangos son distintos, el sistema es **Incompatible (S.I.)**.



S.C.D. si $a \notin \{2, -2\}$; S.C.I. si $a = 2$; S.I. si $a = -2$.

b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

Si $a \notin \{2, -2\}$ (S.C.D.), usaré la Regla de Cramer. $|A| = 4 - a^2$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix}}{4 - a^2} = \frac{-3a + 2}{4 - a^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4 - a^2} = \frac{3a - 2}{4 - a^2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix}}{4 - a^2} = \frac{-a - 2}{4 - a^2} = \frac{-(a + 2)}{-(a - 2)(a + 2)} = \frac{1}{a - 2}$$

Si $a = 2$ (S.C.I.), el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

Restando las ecuaciones (Ec1-Ec2) obtenemos $z = 1$.

Sustituyendo en la primera: $x + y + 3(1) = 2 \implies x + y = -1$.

Parametrizamos la solución. Sea $y = \lambda$, entonces $x = -1 - \lambda$.

Si $a \notin \{2, -2\}$, la solución es $x = \frac{-3a+2}{4-a^2}$, $y = \frac{3a-2}{4-a^2}$, $z = \frac{1}{a-2}$.
 Si $a = 2$, la solución es $x = -1 - \lambda$, $y = \lambda$, $z = 1$ ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$).



Problema 2. Álgebra y Geometría

Se dan los planos $\pi_1 : x + y + z = a - 1$, $\pi_2 : 2x + y + az = a$ y $\pi_3 : x + ay + z = 1$.

- Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a .
- Para $a=1$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3 .
- Para $a=2$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2 .

Solución:

- Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a .

La posición relativa de los tres planos se determina estudiando el sistema de ecuaciones que forman.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1(1 - a^2) - 1(2 - a) + 1(2a - 1) = 1 - a^2 - 2 + a + 2a - 1 = -a^2 + 3a - 2.$$

$$|A| = 0 \implies -a^2 + 3a - 2 = 0 \implies a = 1, a = 2.$$

Caso 1: $a \notin \{1, 2\}$. $|A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$. S.C.D. Los tres planos se cortan en un punto.

Caso 2: $a = 1$. $|A| = 0$, $\text{Rg}(A) = 2$.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

$$\det(C_1, C_2, C_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rg}(A^*) = 3.$$

$\text{Rg}(A) \neq \text{Rg}(A^*)$. S.I. Geométricamente, comparamos normales: $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{n}_3 = (1, 1, 1)$.

Como los términos independientes son distintos (0 y 1), π_1 y π_3 son paralelos. **Dos planos paralelos y uno secante.**

Caso 3: $a = 2$. $|A| = 0$, $\text{Rg}(A) = 2$.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

La cuarta columna es idéntica a la primera ($C_4 = C_1$), por lo que $\text{Rg}(A^*) = 2$. S.C.I.

Como no hay planos paralelos, **los tres planos se cortan en una recta.**

Si $a \notin \{1, 2\}$, se cortan en un punto.
 Si $a = 1$, dos planos son paralelos y uno secante.
 Si $a = 2$, se cortan en una recta.

- Para $a=1$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3 .

Para $a=1$, las ecuaciones son $\pi_1 : x + y + z = 0$ y $\pi_3 : x + y + z = 1$. Como hemos visto, son planos paralelos y distintos, por lo que no se cortan.

No existe recta de corte, los planos son paralelos.

- Para $a=2$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2 .



Para $a=2$, las ecuaciones son $\pi_1 : x + y + z = 1$ y $\pi_2 : 2x + y + 2z = 2$. Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2x + y = 2 - 2z \end{cases}$$

Sea $z = \lambda$. Restando (Ec2-Ec1): $x = 1 - \lambda$.

Sustituyendo en la primera: $(1 - \lambda) + y = 1 - \lambda \implies y = 0$.

La recta de corte es $(x, y, z) = (1 - \lambda, 0, \lambda)$.

Problema 3. Análisis

Consideramos la función $f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)}$. Obtened:

- El dominio y las asíntotas de la función.
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- La integral $\int f(x)dx$.

Solución:

- El dominio y las asíntotas de la función.

Dominio: Se anula el denominador si $x(x+2) = 0$, es decir, $x = 0$ o $x = -2$.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$$

Asíntotas Verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-1}{0} = \pm\infty \implies \text{A.V. en } x=0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{-3}{0} = \pm\infty \implies \text{A.V. en } x=-2$$

Asíntota Horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = 0 \implies \text{A.H. en } y=0$$

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$. **A.V.:** $x = -2, x = 0$. **A.H.:** $y = 0$.

- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{1(x^2 + 2x) - (x-1)(2x+2)}{(x^2 + 2x)^2} = \frac{x^2 + 2x - (2x^2 - 2)}{(x^2 + 2x)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 2x)^2}$$

Los puntos críticos se obtienen al igualar la derivada a cero: $f'(x) = 0 \implies -x^2 + 2x + 2 = 0 \implies x = 1 \pm \sqrt{3}$.

$$x_1 = 1 - \sqrt{3} \approx -0.73, \quad x_2 = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73.$$

Construimos una tabla para estudiar el signo de $f'(x)$, determinado por el numerador, en los intervalos definidos por el dominio y los puntos críticos.

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1 - \sqrt{3})$	$(1 - \sqrt{3}, 0)$	$(0, 1 + \sqrt{3})$	$(1 + \sqrt{3}, \infty)$
Signo $f'(x)$	-	-	+	+	-
$f(x)$	Decreciente ↘	Decreciente ↘	Creciente ↗	Creciente ↗	Decreciente ↘

La función tiene un mínimo relativo en $x = 1 - \sqrt{3}$ y un máximo relativo en $x = 1 + \sqrt{3}$.

Creciente: $(1 - \sqrt{3}, 0) \cup (0, 1 + \sqrt{3})$.
Decreciente: $(-\infty, -2) \cup (-2, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, \infty)$.



c) La integral $\int f(x)dx$.

Descomponemos en fracciones simples: $\frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$.

$x - 1 = A(x + 2) + Bx$. Si $x = 0 \implies -1 = 2A \implies A = -1/2$.

Si $x = -2 \implies -3 = -2B \implies B = 3/2$.

$$\int \left(\frac{-1/2}{x} + \frac{3/2}{x+2} \right) dx = -\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x+2| + C$$

$$\boxed{\int f(x)dx = -\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x+2| + C.}$$

Problema 4. Álgebra

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 + 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m .
- Explicad cuándo la matriz A es invertible.
- Resolved la ecuación $XA=I$ donde I es la matriz identidad en el caso $m=1$.

Solución:

- Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m .

El rango depende del determinante. Lo calculamos desarrollando por la segunda fila:

$$|A| = m \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & m \\ 2 & m^2 + 1 \end{vmatrix} = m(-m^2 - 1 - 2m) = -m(m+1)^2$$

$$|A| = 0 \implies m = 0 \text{ o } m = -1$$

Caso 1: $m \notin \{0, -1\}$. $|A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$.

Caso 2: $m = 0$. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\text{Rg}(A) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Caso 3: $m = -1$. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. $\text{Rg}(A) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Si $m \notin \{0, -1\}$, $\text{Rg}(A) = 3$. Si $m \in \{0, -1\}$, $\text{Rg}(A) = 2$.

- Explicad cuándo la matriz A es invertible.

Una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero. Basado en el apartado anterior, A es invertible si $|A| = -m(m+1)^2 \neq 0$.

A es invertible si y solo si $m \neq 0$ y $m \neq -1$.

- Resolved la ecuación $XA=I$ donde I es la matriz identidad en el caso $m=1$.

De la ecuación, si A es invertible, podemos despejar X : $XA = I \implies X = A^{-1}$. Para $m = 1$, $|A| = -1(1+1)^2 = -4$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa por adjuntos:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & -4 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -5/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -5/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$



Problema 5. Geometría

Dados el punto $P(1, 2, 3)$ y el plano $\pi : 3x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

- Calculad la distancia del punto P al plano π .
- Calculad el punto P' que es simétrico del punto P respecto del plano π .
- Calculad la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π .

Solución:

- Calculad la distancia del punto P al plano π .

$$d(P, \pi) = \frac{|3(1) + 2(2) + 1(3) + 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|3 + 4 + 3 + 4|}{\sqrt{14}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

$$d(P, \pi) = \sqrt{14} \text{ unidades.}$$

- Calculad el punto P' que es simétrico del punto P respecto del plano π .

1. Recta $r \perp \pi$ que pasa por P : $\vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (3, 2, 1)$. $r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(3, 2, 1)$.

2. Intersección M de r y π : $3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + (3 + \lambda) + 4 = 0 \implies 14\lambda + 14 = 0 \implies \lambda = -1$.

$$M = (1 - 3, 2 - 2, 3 - 1) = (-2, 0, 2)$$

3. M es el punto medio de PP' : $P' = 2M - P = 2(-2, 0, 2) - (1, 2, 3) = (-5, -2, 1)$.

$$\text{El punto simétrico es } P' = (-5, -2, 1).$$

- Calculad la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π .

π' es paralelo a π , por lo que su ecuación es $3x + 2y + z + D = 0$.

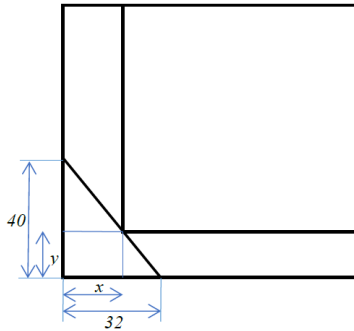
Pasa por $P'(-5, -2, 1)$: $3(-5) + 2(-2) + 1 + D = 0 \implies -15 - 4 + 1 + D = 0 \implies D = 18$.

$$\pi' \equiv 3x + 2y + z + 18 = 0.$$

Problema 6. Análisis

Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina... En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R, uno de cuyos vértices es el punto (x, y) .

- Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x , cuando $0 \leq x \leq 32$.
- Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima.
- Calculad el valor de dicha área máxima.



Solución:

- Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x , cuando $0 \leq x \leq 32$.

La línea de rotura es una recta que pasa por $(32, 0)$ y $(0, 40)$. Su ecuación es $y = 40 - \frac{5}{4}x$.

El rectángulo R tiene un vértice (x, y) en esta recta, y sus lados son paralelos a los ejes, con esquinas en $(x, 80)$ y $(80, y)$.

Dimensiones de R: Ancho = $(80 - x)$ y Alto = $(80 - y)$.

Área $A(x) = (80 - x)(80 - y) = (80 - x)(80 - (40 - \frac{5}{4}x)) = (80 - x)(40 + \frac{5}{4}x)$.

$$A(x) = 3200 + 100x - 40x - \frac{5}{4}x^2 = -\frac{5}{4}x^2 + 60x + 3200$$

$$A(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 60x + 3200.$$

- Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima.

Para maximizar, derivamos el área e igualamos a cero:

$$A'(x) = -\frac{5}{2}x + 60$$

$A'(x) = 0 \implies \frac{5}{2}x = 60 \implies x = 24$. Este valor está en el dominio $[0, 32]$.

Estudiamos la monotonía:

Intervalo	$(0, 24)$	$(24, 32)$
Signo $A'(x)$	+	-
$A(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘

Hay un máximo en $x = 24$.

Para $x = 24$: $y = 40 - \frac{5}{4}(24) = 10$.

Dimensiones de R: Ancho = $80 - x = 56$ cm. Alto = $80 - y = 70$ cm.

Las dimensiones son 56 cm de ancho y 70 cm de alto.

c) Calculad el valor de dicha área máxima.

$$\text{Área Máxima} = 56 \times 70 = 3920 \text{ cm}^2.$$

$$A(24) = -\frac{5}{4}(24)^2 + 60(24) + 3200 = -720 + 1440 + 3200 = 3920$$

El área máxima es de 3920 cm².